# PRIMITIVES

## 1 ) PRIMITIVES

### A ) DÉFINITION

**Exemple :** Soit les fonction $f : x \longmapsto 2x^2+3x+5$ et $F : x \longmapsto \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x+3$ définies sur $\mathbb{R}$. Quel lien existe-il entre $F$ et $f$ ?

**Définition :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ .
Une primitive de $f$ sur $I$ est une fonction $F$ dérivable sur $I$ , telle que pour tout $x$ dans $I$ , $F'(x)=f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

**Théorème :**

Si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle, alors $f$ admet des primitives sur cet intervalle.

### B ) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

**Propriété :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ , alors $f$ admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de $f$ sur $I$ est définie par $G(x)=F(x)+k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

**Exemple :** Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $f$.

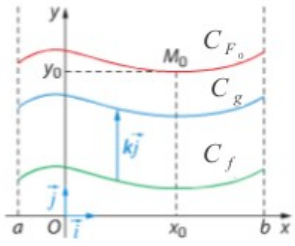
**Propriété :**

Soit $f$ une fonction admettant des primitives sur $I$.
Pour tout couple de réels $(x_0 ; y_0)$ où $x_0$ est un réel donné dans $I$ et $y_0$ est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule $F_0$ de $f$ sur I telle que $F_0(x_0)=y_0$

**Exemple :** Déterminer la primitive de la fonction $f$ prenant la valeur $\frac{13}{6}$ en 1.

**Remarque :**

Les courbes représentatives des primitives d'une fonction $f$ se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k\vec{j}$ $(k \in \mathbb{R})$.
Une seule d'entre elles passe par le point $M_0$ de coordonnées $(x_0 ; y_0)$



## C ) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si $F$ et $G$ sont des primitives des fonctions $f$ et $g$ sur un intervalle $I$ , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur $I$.
- si $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur un intervalle $I$ et $\lambda$ un réel, alors $\lambda F$ est une primitive de $\lambda f$ sur $I$.

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

**Exemple :**

Déterminer les primitives de la fonction $g$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g : x \longmapsto \dfrac{6}{\sqrt{x}} + x^2$.

On retiendra le tableau suivant :
Soit une fonction $u$ dérivable sur un intervalle $I$, on a :

| Une fonction de la forme | … admet pour primitive sur $I$ les fonctions : |
|---|---|
| $t \longmapsto u'(t)\,e^{u(t)}$ | |
| $t \longmapsto u'(t) \times (u(t))^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ $(n \neq -1)$ | |
| $t \longmapsto \dfrac{u'(t)}{u(t)}$ , avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$ | |
| $t \longmapsto \cos(\alpha t + \varphi)$ , où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ | |
| $t \longmapsto \sin(\alpha t + \varphi)$ , où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ | |

**Exemple :**

Déterminer les primitives de la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h : x \longmapsto (4x+6)\,e^{x^2+3x}$

**Attention :** Il ne faut pas oublier la constante multiplicative !