INTÉGRALES

1) DÉFINITION

Définition :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Pour tous réels a et b de I, on appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b)-F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t =$$

Deux primitives de f diffèrent d'une constante .
Ainsi le nombre $F(b)-F(a)$ est indépendant du choix de la primitive de f sur I.

Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit : " intégrale ou somme de a à b de $f(t)\mathrm{d}t$ ".
- La variable t est appelée variable "muette".

  On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable :
- On note aussi $F(b)-F(a)=\left[F(t)\right]_a^b$ qui se lit : " $F(t)$ pris entre a et b ".

Exemples :

- $\int_1^2 5\,\mathrm{d}t =$
- $\int_1^e \frac{1}{t}\mathrm{d}t =$
- $\int_2^1 x^2+x\,\mathrm{d}t =$

On n'a pas nécessairement $a \leqslant b$

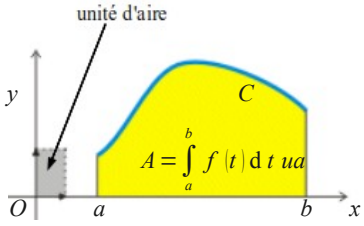
Utilisation de Xcas :
Il n'est pas toujours possible, voire impossible de déterminer une primitive . Dans ce cas, ou de façon générale pour vérifier les calculs, il est possible d'utiliser un logiciel de calcul formel comme Xcas.
Pour le troisième exemple la commande est : « int(x^2+x,x,2,1) »

2) INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

A) CAS D'UNE FONCTION POSITIVE

Propriété :

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.
le réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ mesure l'aire A, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\end{cases}$



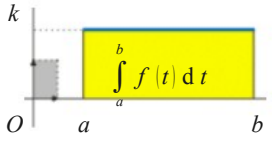
On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a\,;b]$ le domaine limité par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Remarques :

- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
  Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est
- On a précisé que f doit être dérivable sur $[a\,;b]$. En fait, il suffit de dire « continue » ce qui signifie pour simplifier (sauf exception tordue) que l'on peut tracer la courbe représentant f sans lever le crayon.

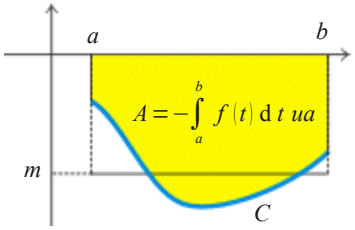
Exemples :

- Si $a=b$, alors .



- Pour $k>0$,
-

B) CAS D'UNE FONCTION NÉGATIVE

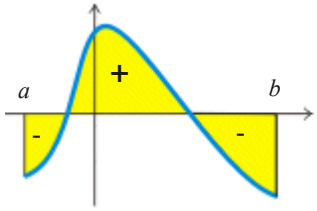


Propriété :

Si f est dérivable est négative sur $[a\,;b]$, le réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ mesure l'opposé de l'aire A , en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$

On dit parfois que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est l'aire algébrique du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur [a ; b], et négative si f est négative sur [a ; b].

C) CAS D'UNE FONCTION CHANGEANT DE SIGNE



Propriété :

Si f est une fonction dérivable qui change de signe sur [a ; b], le réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ mesure la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.

3) ÉTUDE DE $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$

Théorème :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

Plus précisément, F est l'unique primitive de f sur $[a\,;b]$ s'annulant en a.

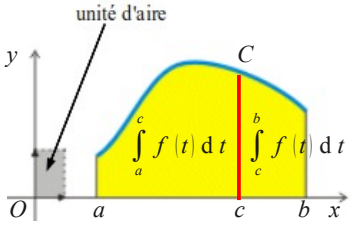
Remarque :

Par définition de la fonction logarithme, on obtient pour tout $x>0$,

4) RELATION DE CHASLES

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel $c\in[a\,;b]$, on a :



Si f est positive, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

Remarque :

5) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel . On a :

-
-

Exemple :

$$\int_e^3 3x+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

Avec Xcas, on saisit « simplifier(int(3*x+1/x,x,e,3)) »
Ce qui donne (-3*exp(1)^2+ln(9)+25)/2

6) POSITIVITÉ - ORDRE

Propriétés :

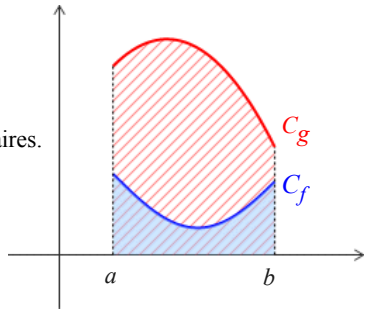
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$:

- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\geqslant 0$, alors
- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x)\leqslant g(x)$, alors

On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a\leqslant b$ on peut intégrer l'inégalité $f\leqslant g$ sur $[a\,;b]$.

Remarque :

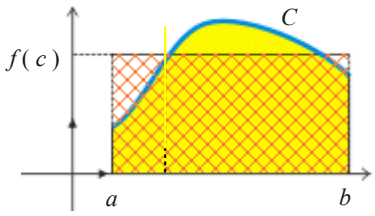
Si f et g sont positives, l'inégalité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ s'interprète de façon immédiate avec les aires.



7) VALEUR MOYENNE

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$.



Pour une fonction positive, la valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire définie par $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

8) INTEGRATION PAR PARTIES

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées u' et v' sont dérivables sur I.
Soit a et b deux éléments de I . On a :

Cette formule vient directement de la formule :

$$(uv)'=u'v+uv'$$

Exemple : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \,\mathrm{d}\, x$

Avec Xcas, on saisit « int(x*cos(x),x,0,pi/2)» . On obtient 1/2*pi-1

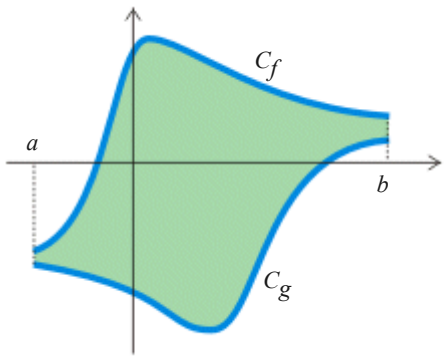
Remarque :
Après avoir fait une intégration par parties, la nouvelle intégrale que l'on a à calculer doit être plus simple que la première . Si ce n'est pas le cas, il faut peut-être modifier le choix de u et v' . On pourra, si besoin est, utiliser plusieurs fois l'intégration par parties.

9) CALCULS D'AIRES

Propriété

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que, pour tout $x\in[a\,;b]$, $g(x)\leqslant f(x)$

L'aire du domaine limité par les courbes de f et de g et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant $\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ g(x)\leqslant y\leqslant f(x) \end{cases}$,
est donnée en unités d'aires par :



Remarque : Si f ou g est la fonction nulle, on retrouve les interprétations graphiques vues pour les fonctions positives et négatives.