Fonction tangente

Exercice 1 :

Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\tan(x)}{x}$

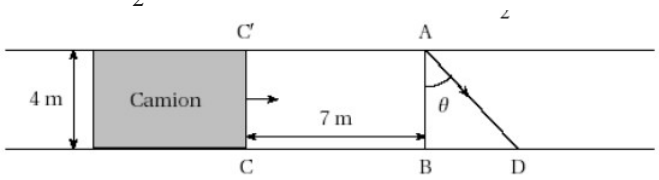
Exercice 2 :

Déterminer une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

$f(x)=\tan x$ sur $I=\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$

Exercice 3 :

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui.
Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à 30 km/h ! L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.
Cette direction est repérée par l'angle $\theta=\widehat{BAD}$,
avec $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ (en radians).



1) Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2) On pose $f(\theta)=\dfrac{7}{2}+2\tan\theta-\dfrac{4}{\cos\theta}$
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta)>0$
3) En utilisant la représentation graphique de f, donner un encadrement en degrés de l'angle selon lequel doit partir le lapin afin de ne pas être écrasé.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{\tan(x)}$
1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Étudier la parité de f.
3) Montrer que f est périodique.
4) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $]0;\pi[$
5) Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variation de f, puis représenter f sur $]-2\pi;2\pi[$

Fonction arctangente

Exercice 5 :

Calculer $\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}$ pour x réel non nul.

Calculer cos(arctan *a*) et sin(arctan *a*) pour a réel donné.

Exercice 6 :

En utilisant la formule : $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
Calculer $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{8}$

Exercice 7 :

On considère la fonction numérique f telle que :
$f(x)=(x^2-1)\arctan\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$
et on appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
1) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2) Exprimer, sur D -{0}, la dérivée de f sous la forme :
$f(x)=2xg(x)$.
3) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2x^4-4x^3+9x^2-4x+1>0$
En déduire le tableau de variation de g.
4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 8 :

Calculer les limites suivantes, puis vérifier avec Xcas :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\left(\dfrac{x^2+2}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to0}\arctan(\ln(x))$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$

Exercice 9 :

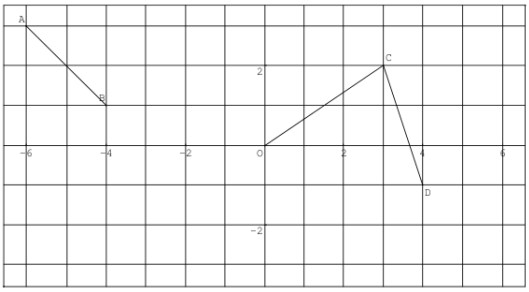
Calculer les dérivées des fonctions suivantes, puis vérifier avec Xcas :

a) $f(x)=\arctan(x^2)$ b) $g(x)=\arctan(\ln(x))$
c) $h(x)=\cos(3x+7)$ d) $i(x)=-3\sin(-5x+7)$

Parité, périodicité

Exercice 10 :

La courbe C_f représentant la fonction f définie sur $[-6;6]$ est partiellement représentée ci-contre.
Sachant que f est impaire, compléter le tracé de C_f en justifiant la méthode.
Donner le tableau de variation de f.



Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par :
$f(x)=\dfrac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$
1) Déterminer son ensemble de définition.
2) Démontrer que f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.
3) Étudier la parité de la fonction f.
4) Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f. (On se limitera à l'intervalle $[-3;3]$)
5) Donner par lecture graphique la valeur du maximum de la fonction f sur :
a) l'intervalle $[-1;1]$
b) l'intervalle $[-2;1]$
6) Résoudre l'inéquation $f(x)\leqslant1$

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par
$f(x)=x(x-2)$
1) Étudier la parité de la fonction f.
2) Démontrer que $f(x)=(x-1)^2-1$
3) Démontrer que la fonction f est minorée par -1.
4) Vérifier ces résultats avec la calculatrice.

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie par :
$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$
1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2) Étudier la parité de la fonction f .
3) Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f .
4) Démontrer que la fonction f admet un maximum $M=2$. (On pourra déterminer le signe de $(f(x))^2-4$.

Exercice 14 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$
1) Étudier la parité de la fonction f .
2) Démontrer que $f(x)<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
3) Vérifier ces résultats avec la calculatrice.

Exercice 15 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2}{2+\cos x}$
1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
2) Montrer que la fonction f est paire et déterminer sa période.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi\,;\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi\,;3\pi]$

Exercice 16 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1$
1) Déterminer la période et la parité de la fonction f .
2) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f .
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-2\pi\,;2\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-4\pi\,;4\pi]$.

Exercice 17 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1+\sin 2x+2\cos x$
1) Visualiser la courbe sur votre calculatrice et faites une conjecture sur la périodicité de la fonction f puis démontrer cette conjecture.

2) Montrer que l'on peut étudier la fonction f sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$
puis montrer que : $f'(x)=-2(\sin x+1)(2\sin x-1)$
3) Étudier les variations sur I puis dresser le tableau de variation sur I .
4) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède exactement deux solutions dans I et donner un encadrement à 10^{-1} de chacune de ces solutions. On note α et β ces solutions avec $\alpha<\beta$.
5) En déduire les variations sur I de la fonction g définie par :
$g(x)=2x-\cos 2x+4\sin x$

Exercice 18 :

On note $E(x)$ la partie entière de x .
Rappel : $E(x)$ est le nombre entier tel que $E(x)\leqslant x\leqslant E(x)+1$
1) En utilisant la définition, montrer que $E(x+1)=E(x)+1$
2) Montrer que la fonction f , définie par $f(x)=2x-2E(x)$ est périodique de période 1 .
3) Représenter graphiquement f sur $[-3\,;3]$.

Exercice 19 :

Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x)=x-E(x)$.
1) Calculer les images par d des réels : 5,2 ; 1,5 ; 8 ; – 6,3.
2) Montrer que pour tout réel x , on a : $0\leqslant d(x)<1$.
3 Montrer que la fonction d est périodique, de période 1 .
4) Représenter graphiquement la fonction d sur l'intervalle $[0\,;1[$.
En déduire la représentation graphique de d .

5) Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x-E(x)}$.
a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
b) Montrer que f est périodique, de période 1.

6) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-1)^{E(x)}d(x)$.
a) Montrer que g est périodique.
b) Représenter graphiquement la fonction g .

Fonctions rationnelles : décomposition en éléments simples

Exercice 20 :

Faire correspondre $f(x)$ avec sa décomposition en éléments simples :

$f(x)$	Décomposition en éléments simples de $f(x)$
$\dfrac{x^4+1}{(x-2)^2}$	$x^3+2x^2+5x+8+\dfrac{16}{x-2}$
$\dfrac{2x^4+x^2-3x}{(x-1)^4}$	$x^2+4x+12+\dfrac{17}{(x-2)^2}+\dfrac{32}{x-2}$
$\dfrac{x^4+x^2-2x}{x-2}$	$2+\dfrac{1}{x+1}$
$\dfrac{x^5+3x^3-2x}{(x-1)^2(x-2)(x-3)}$	$x+7+\dfrac{\frac{159}{2}}{x-3}+\dfrac{-52}{x-2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{\frac{15}{2}}{x-1}$
$\dfrac{2x^3+x^2-3x}{x^3-x}$	$2+\dfrac{7}{(x-1)^3}+\dfrac{13}{(x-1)^2}+\dfrac{8}{x-1}$

Exercice 21 :

Dans chacun des cas ci-dessous, écrire $f(x)$ sous la forme
$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$, puis vérifier avec Xcas.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x+1}$ b) $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x+1}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+6}{x+1}$

Exercice 22 :

Dans chacun des cas ci-dessous, écrire $f(x)$ sous la forme
$f(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}+\dfrac{c}{x-2}$, puis vérifier avec Xcas.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{(x-2)^2}$ b) $f(x)=\dfrac{5x^2-5}{(x-2)^2}$

Exercice 23 :

Soit f la fonction définie sur $I=[0\,;5]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+5}$
Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$
En déduire $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 24 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{5x^3-5}{(x+2)^2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

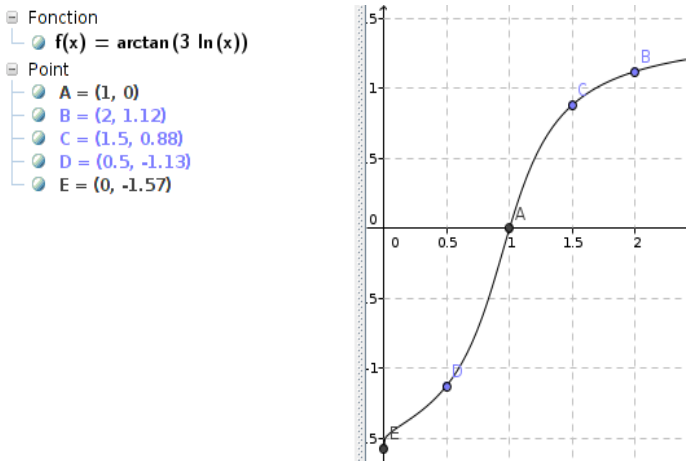
2) En utilisant le résultat ci-dessous obtenu avec Xcas, déterminer les primitives de f sur $]-2\,;+\infty[$

```
f(x):=(5*x^3-5)/(x+2)^2;
partfrac(f(x));
```

$$\left(x \to \frac{5\cdot x^3-5}{(x+2)^2},\ 5\cdot x-20+\frac{-45}{(x+2)^2}+\frac{60}{x+2}\right)$$

Approximation globale d'une fonction sur un intervalle

Exercice 25 :



1) Déterminer une approximation de la fonction f sur $[0{,}5\,;1{,}5]$ par une fonction affine par morceaux.

2) Interpréter le résultat ci-dessous, puis vérifier graphiquement :

```
solve([a*ln(1)+b=0,a*ln(1.5)+b=0.88],[a,b])
```

$$[2.17034704646,\ 0.0]$$

```
solve([a*e^0.5+b=-1.13,a*e^1+b=0],[a,b])
```

$$[1.05650866781,\ -2.8718883133]$$

```
f(x):=a*x^2+b*x+c;
solve([f(1)=0,f(1.5)=0.88,f(2)=1.12],[a,b,c])
```

$$\left(x \to a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ [-1.28,\ 4.96,\ -3.68]\right)$$

3) Interpréter le résultat ci-dessous, puis vérifier graphiquement :

```
a:=lagrange([[0,0.5,1,1.5,2],[-1.57,-1.13,0,0.88,1.12]])
```

$$(((0.366666666667\cdot(x-1.5)-1.25333333333)\cdot(x-1)+1.38)\cdot(x-0.5)+0.88)\cdot x-1.57$$

```
simplifier(a)
```

$$0.366666666667\cdot x^4-2.35333333333\cdot x^3+4.26833333333\cdot x^2-0.711666666667\cdot x-1.57$$