LES FONCTIONS TANGENTE ET ARC TANGENTE

1) LA FONCTION TANGENTE

Définition :

La fonction tangente, notée $\tan$, est définie pour tout réel x tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) , par :

Par la suite, on note D l'ensemble de définition de la fonction tangente.

Périodicité :

La fonction tan est périodique de période π . Pour tout $x \in D$:

Preuve :

On peut ainsi se contenter d'étudier la fonction tangente sur

Parité

La fonction tangente est impaire, sa courbe représentative admet donc l'origine pour centre de symétrie.

Preuve :

On peut ainsi se contenter d'étudier la fonction tangente sur

Dérivabilité :

La fonction tangente est dérivable sur D et pour tout réel $x \in D$ on a :

Preuve :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur D et $\cos x \neq 0$ sur D , donc la fonction tangente est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, on a :

Tableau de variations :

Pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan' x > 0$ donc la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

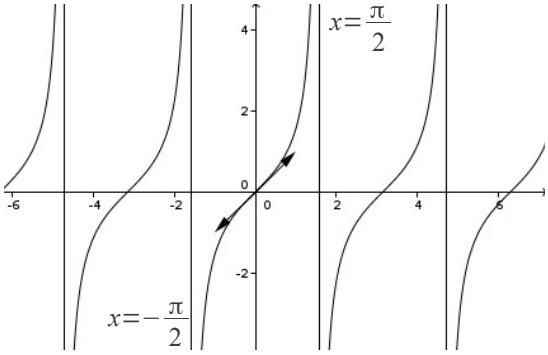
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x =$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x =$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x =$

x	
$\tan' x$	
tan	

Représentation graphique :

Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} , \vec{j})$,

- On trace la courbe C qui représente la fonction tangente sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$,
- puis par symétrie par rapport à O ,on obtient la courbe C sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$,
- et enfin on applique à C les translations de vecteurs $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,



2) LA FONCTION ARC TANGENTE

Pour tout réel a , il existe un unique réel $b \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan b = a$.
Ce réel est appelé arc tangente de a et on le note $\arctan a$
On peut ainsi définir une fonction , définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par :

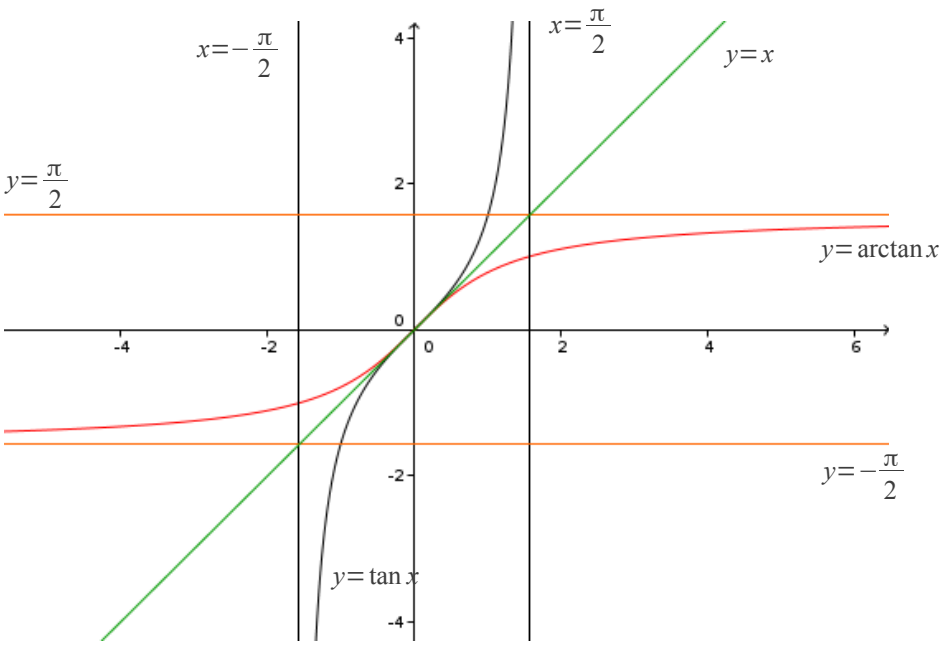
On dit que cette fonction est la fonction réciproque de la fonction tangente, restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Propriété :

Remarque : la fonction arctan correspond à la fonction $\tan^{-1}$ de la calculatrice.

Nous admettrons un résultat déjà rencontré.
Les représentations graphiques d'une fonction et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
On peut penser aux fonctions exp et ln , la fonction carrée restreinte à $\mathbb{R}^+$ et la fonction racine carrée.

Par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$, les asymptotes verticales de la courbe représentative de la fonction tan se transforment en asymptotes horizontales, d'équations $y = -\frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{2}$, de la courbe représentative de la fonction arctan .



On admet les conjectures graphiques suivantes :

- la fonction arctan est
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x =$

Propriété :

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x $\in$ $\mathbb{R}$, on a :